

TD₃ – Algèbre Linéaire : Rappels et Compléments

Exercice 1 ★

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension.

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\} \quad F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : (X - 1)P' - XP'' = 2P\} \quad H = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : MN = NM\}$$

où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, avec λ_1, λ_2 deux réels fixés distincts

Exercice 2 ★

- $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 4)$, $u_3 = (1, 0, -2)$, $u_4 = (-5, 16, 24)$ forment-ils une famille libre ?
- $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 4)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?
- Soit $a = (-3, 1, 4, -3)$, $b = (-1, 7, -8, 7)$, et $c = (11, -7, -10, 7)$. Existe-il un vecteur d de $\mathbb{R}^4$ tel que (a, b, c, d) soit une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 ★★★

Déterminer si les familles suivantes de E sont libres :

- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \mathbb{R})$ où les a_i deux-à-deux distincts, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \frac{1}{x - a_k}$.
- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$.
- $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f_1, \dots, f_n)$ où $f_k : x \mapsto \sin(kx)$.

Exercice 4 ★★

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer le rang de la famille (f, g, h, k) où $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto e^x$, $h : x \mapsto e^{x+1}$ et $k : x \mapsto x$.

Exercice 5 ★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \text{Vect}(\{(1, -2, 0, 2), (0, 0, 1, 3)\}).$$

- Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$
- Trouver une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.
- Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.
- En déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 6 ★★

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Notons F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergentes de limite nulle.

- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

2. Montrer qu'ils sont en somme directe
3. Déterminer $F \oplus G$

Exercice 7 ★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 1, 1, 3)$, $w = (2, 1, 1, 1)$, $x = (-1, 0, -1, 2)$ ainsi que $y = (2, 3, 0, 1)$.

Déterminer (en justifiant) les dimensions des espaces $U = \text{Vect}(u, v, w)$, $V = \text{Vect}(x, y)$ puis des espaces $U + V$ et $U \cap V$.

Exercice 8 ★★★★★

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$P \in F_i \text{ si et seulement si il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - j).$$

2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \dots + F_n$ est directe.

3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n F_i$.

Exercice 9 ★★

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XQ' + Q = P$.

Exercice 10 ★★

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Montrer que $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$.

Exercice 11 ★★

Soit p l'application $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $p(x, y) = \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)$.

1. Montrer que p est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $\text{Ker} p$. L'application p est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\text{Im} p$.
4. Montrer que $p \circ p = p$. Les sous-espaces $\text{Ker} p$ et $\text{Im} p$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{C}^2$?

Exercice 12 ★★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . Montrer que

$$p \circ q = p \Leftrightarrow \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$$

et que

$$q \circ p = p \Leftrightarrow \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$$

Exercice 13 ★★★★★

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe deux homothéties, et deux seulement, vérifiant la condition demandée.

2. Montrer que $f \in \mathcal{GL}(E)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(f - Id_E) \oplus \text{Ker}(f + 3Id_E)$.

Exercice 14 ★★★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E .

1. Montrer que pour tout $u \notin \text{Ker}(\varphi)$, $E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(u)$.
2. Soit ψ une autre forme linéaire non nulle sur E . Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$.

Exercice 15 ★★★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ constitue une base de E .

Exercice 16 ★★★★★

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère
$$\begin{array}{ccc} a & : & E \rightarrow E \\ P & \mapsto & XP \end{array}$$
 et l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \mapsto & u \circ a - a \circ u \end{array}$$

1. Montrer que a est un endomorphisme de E . Est-il injectif? Surjectif?
2. Montrer que φ est un endomorphisme non injectif de $\mathcal{L}(E)$.
3. En écrivant pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre $u(X^n)$, $u(X^{n+1})$ et $\varphi(u)(X^n)$, montrer que φ est surjectif.

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★

(Oral 2008)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et D l'application qui, à un polynôme associe sa dérivée P' .

1. Montrer que D est un endomorphisme de E . En préciser le noyau et l'image.
2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $D^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
3. Montrer que $\text{Id}_E - D$ est un isomorphisme de E .
4. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$

Exercice 18 ★★★

(Oral 2009, 2011)

1. Soit p et q deux projecteurs de E .
 - (a) Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - (b) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - (c) Comparer alors $\text{Ker}(p + q)$ et $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
 - (d) Comparer de même $\text{Im}(p + q)$ et $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x, 2x)$
 - (a) Montrer que f est un projecteur.
 - (b) Déterminer tous les projecteurs g tels que $f + g$ soit un projecteur.

Exercice 19 ★★★

(Oral 2013, 2014, 2015)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.
3. En déduire que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.

Exercice 20 ★★★

(Oral 2014)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, F l'ensemble des polynômes P de E tels que $\int_0^1 P(t) dt = 0$ et $G = \text{Vect}(1 + X + X^2)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . Quel est sa dimension ?
2. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Pour Q dans E , déterminer $p(Q)$ en fonction de $\int_0^1 Q(t) dt$ et de Q .

Exercice 21 ★★

(Oral 2017)

Montrer que φ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

$$\begin{aligned}
E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y\} \\
&= \{(-2y, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \text{Vect}((-2, 1, 0), (0, 0, 1))
\end{aligned}$$

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en tant qu'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

La famille $(-2, 1, 0), (0, 0, 1)$ est génératrice de E . Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de E , qui est ainsi de dimension 2.

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \right\} \\
&= \{(-2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(-2, 1, 1), z \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{Vect}(-2, 1, 1).
\end{aligned}$$

Ainsi F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

La famille $(-2, 1, 1)$ est génératrice de F . Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul, c'est donc une base de F et $\dim F = 1$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $P \in G$ si et seulement si

$$(X - 1)(2aX + b) - 2aX = 2aX^2 + 2bX + 2c$$

C'est-à-dire si et seulement si

$$2aX^2 + bX - 2aX - b - 2aX = 2aX^2 + 2bX + 2c$$

On sait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, ainsi identification des coefficients, $P \in G$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = 2a \\ b - 4a = 2b \\ -b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{4} \\ c = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

Et donc $P \in G \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}, P = b \left(-\frac{X^2}{4} + X - \frac{1}{2} \right)$. On a ainsi $G = \text{Vect} \left(-\frac{X^2}{4} + X - \frac{1}{2} \right) = \text{Vect}(X^2 - 4X + 2)$.

En particulier, G est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, de base $X^2 - 4X + 2$ et par conséquent $\dim G = 1$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $M \in H$ si et seulement si

$$\begin{cases} a\lambda_1 = a\lambda_1 \\ b\lambda_1 = b\lambda_2 \\ c\lambda_1 = c\lambda_2 \\ d\lambda_2 = d\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \\ c(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

Et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceci équivaut à $b = c = 0$.

Ainsi,

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont une famille génératrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puisqu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non colinéaires, elle est libre, et donc c'est une base de H . H est donc de dimension 2

Corrigé de l'exercice 2

1. Non, c'est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
2. Puisque c'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est génératrice si et seulement si c'est une base si et seulement si elle est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = 0 \\ \beta & = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma & = 0 \end{cases}$$

D'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc libre et, par suite, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

3. Le théorème de la base incomplète nous dit que cela sera possible si et seulement si la famille (a, b, c) est libre.

Or, par le calcul on peut montrer que $c = -\frac{7}{2}a - \frac{1}{2}b$. La famille (a, b, c) n'est pas libre, il est donc impossible de trouver un vecteur d de $\mathbb{R}^4$ tel que (a, b, c, d) soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0_E$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{x - a_k} = 0$$

D'où, en multipliant par $\prod_{i=1}^n (x - a_i)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (x - a_i) = 0$$

En faisant tendre x vers a_k on a alors $\lambda_k = 0$, ceci pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E .

⚠ Attention

L'égalité ci-dessus est équivalente à :
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$
 $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$. Si vous oubliez le $\forall x$, il n'y a pas équivalence

2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0_E$.

Posons $P = \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n$, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(\sin(x)) = 0$$

Ainsi P est nul sur $[-1, 1]$, P admet alors une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

On en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre dans E .

3. On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}_n$ l'assertion « la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre ».

Initialisation :

Pour $n = 1$ la famille (f_1) est composé d'un seul vecteur, ce vecteur est non-nul donc la famille est libre.

Hérédité : Soit $n \geq 2$, on suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie. Ainsi $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0_E$. Alors, en dérivant deux fois on obtient

$$-\sum_{k=1}^n \lambda_k k^2 f_k = 0_E$$

D'où

$$n^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k k^2 f_k = 0_E - 0_E = 0_E$$

C'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (n^2 - k^2) f_k = 0_E$$

Or la famille $(f_1, \dots, f_{n-1})$ est libre, ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad (n^2 - k^2) \lambda_k = 0$$

On en déduit que $\lambda = 1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

La première égalité devient alors $\lambda_n f_n = 0_E$, d'où, puisque $f_n \neq 0_E$, $\lambda_n = 0$.

Ainsi la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

Autre méthode :

On peut également utiliser une approche similaire à celle employée précédemment

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = 0_E$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \lambda_2 \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} + \dots + \lambda_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

D'où, en multipliant par $2ie^{inx}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 (e^{i(n+1)x} - e^{i(n-1)x}) + \lambda_2 (e^{i(n+2)x} - e^{i(n-2)x}) + \dots + \lambda_n (e^{i2nx} - 1)$$

Posons a

$$P = -\lambda_n - \lambda_{n-1}X - \lambda_{n-2}X^2 - \dots - \lambda_1 X^{n-1} + \lambda_1 X^{n+1} + \dots + \lambda_n X^{2n} = -\sum_{k=1}^n \lambda_{n-k} X^k + \sum_{k=1}^n \lambda_k X^{n+k}$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(e^{ix}) = 0$, d'où, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $P(z) = 0$

P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est donc libre

Vecteurs propres

On verra plus tard un argument beaucoup plus rapide : les fonctions f_i sont des vecteurs propres de l'application $f \mapsto f''$ associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre. Vous reconnaîtrez d'ailleurs ici la preuve de ce résultat général adaptée au cas particulier de notre exercice.

U

$\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, i.e. l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Corrigé de l'exercice 4

On a clairement $h = e \cdot g$ ainsi $\text{Vect}(f, g, h, k) = \text{Vect}(f, g, k)$.

Montrons que la famille (f, g, k) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha f + \beta g + \gamma k = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta e^x + \gamma x = 0$$

En particulier $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha + \beta e^x + \gamma x = 0$, d'où $\gamma = 0$ puis $\alpha = 0$.

Par suite on a $\beta = 0$, la famille (f, g, k) est donc libre, c'est ainsi une base de $\text{Vect}(f, g, k)$.

Il s'ensuit que $\dim(\text{Vect}(f, g, k)) = 3$. Finalement $\text{Rang}(f, g, h, k) = 3$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Les vecteurs $(1, -2, 0, 2)$ et $(0, 0, 1, 3)$ sont non-colinéaires, ils forment ainsi une famille libre et donc une base de G . Ainsi $\dim(G) = 2$.

Cherchons désormais une base de F . Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z + t \\ y = \frac{2}{3}z - 2t \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = z \cdot \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t \cdot (1, -2, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}\left(\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right), (1, -2, 0, 1)\right) \end{aligned}$$

Posons $e_1 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right)$ et $e_2 = (1, -2, 0, 1)$. On a montré que $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$, c'est-à-dire que la famille (e_1, e_2) est génératrice de F .

Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre. Ainsi (e_1, e_2) est une base de F et donc $\dim(F) = 2$.

On a ainsi $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Déterminons maintenant $F \cap G$.

Soit $u \in F \cap G$, puisque $u \in G$ il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = a(1, -2, 0, 2) + b(0, 0, 1, 3) = (a, -2a, b, 2a + 3b)$.

Or $u \in F$, ainsi

$$\begin{cases} a + (-2a) + b + (2a + 3b) = 0 \\ a - 2 \times (-2a) + 3b - 5 \times (2a + 3b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 4b = 0 \\ -5a - 12b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 4b = 0 \\ 8b = 0 \end{cases}$$

On a donc $a = b = 0$, d'où $u = 0_E$. Ceci montre que $F \cap G \subset \{0_E\}$.

Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , $F \cap G$ en est aussi un et donc $\{0_E\} \subset F \cap G$.

Ainsi $F \cap G = \{0_E\}$.

On a donc $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. On en déduit donc que $E = F \oplus G$.

2. On pose $e_3 = (1, -2, 0, 2)$ et $e_4 = (0, 0, 1, 3)$. La famille (e_3, e_4) est une base de G

On sait que la famille (e_1, e_2) est une base de F où $e_1 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right)$ et $e_2 = (1, -2, 0, 1)$.

Puisque $E = F \oplus G$ alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G forme une base de E , ainsi (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E .

3. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, il existe alors $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$.

(a, b, c, d) est alors solution du système

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}a + b + c = x \\ \frac{2}{3}a - 2b - 2c = y \\ a + d = z \\ b + 2c + 3d = t \end{cases}$$

On résout ce système via un pivot de Gauss et on obtient

$$\begin{cases} a = -\frac{3x}{4} - \frac{3y}{8} \\ b = \frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t \\ c = -2x - \frac{y}{2} - 3z + t \\ d = 3x + \frac{3y}{8} + z \end{cases}$$

4. La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ associe (avec les notations précédentes) $ae_1 + be_2$.

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ on a

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 &= \left(-\frac{3x}{4} - \frac{3y}{8}\right) \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + \left(\frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t\right) (1, -2, 0, 1) \\ &= \left(\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} + \frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t, -\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - \frac{7x}{2} + \frac{y}{4} - 6z + 2t, -\frac{3x}{4} - \frac{3y}{8}, \frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t\right) \\ &= \left(3x + \frac{y}{2} + 3z - t, -4x - 6z + 2t, -\frac{3x}{4} - \frac{3y}{8}, \frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la projection sur F parallèlement à G est l'application

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) &\mapsto \left(3x + \frac{y}{2} + 3z - t, -4x - 6z + 2t, -\frac{3x}{4} - \frac{3y}{8}, \frac{7x}{4} - \frac{y}{8} + 3z - t\right) \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6

1. F est l'espace vectoriel engendré par la suite constante égale à 1, $F = \text{Vect}((1)_{n \in \mathbb{N}})$, F est donc bien un sous-espace vectoriel de E .

G est clairement non-vide car il contient la suite constante nulle.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de G et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par opération sur les limites la suite $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Ainsi $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$, G est donc bien un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F \cap G$.

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, elle est donc constante, notons K sa valeur, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = K$. Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par unicité de la limite on en déduit que $K = 0$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante nulle 0_E .

On a ainsi $F \cap G = \{0_E\}$, on en déduit que F et G sont en somme directe.

3. Tout élément de F ou de G est une suite convergente. Ainsi, par opération sur les limites, la somme d'un élément de F et d'un élément de G est une suite convergente.

En d'autres termes $F \oplus G$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites convergentes.

On va montrer que $F \oplus G$ est exactement l'espace vectoriel des suites convergentes.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, notons ℓ sa limite. On a alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\ell)_{n \in \mathbb{N}} + (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et donc appartient à F et la $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc appartient à G . Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F \oplus G$.

Finalement $F \oplus G$ est bien l'espace vectoriel des suites convergentes.

Corrigé de l'exercice 7

Commençons par déterminer si (u, v, w) est libre.

Soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0, 0)$.

On a alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \\ -2\beta - 5\gamma = 0 \\ -\beta - 7\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \\ -4\gamma = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi, (u, v, w) est libre. C'est une base de U qui est donc de dimension 3.

(x, y) est une famille génératrice de V formée de deux vecteurs non colinéaires. Elle est donc libre. C'est une base de V qui est donc de dimension 2.

On a $U + V = \text{Vect}(u, v, w, x, y)$.

On sait que $U + V \subset \mathbb{R}^4$ et donc $\dim(U + V) \leq 4$. De plus $U \subset U + V$ d'où $\dim(U + V) \geq 3$.

Puisque $U \subset U + V$ on aura $\dim(U + V) = 3$ si et seulement $U + V = U$ et donc si et seulement si $x \in U$ et $y \in U$.

Or $x \in U$ si et seulement si la famille (u, v, w, x) est liée, de même $y \in U$ si et seulement si la famille (u, v, w, y) est liée.

Ainsi, $U + V$ est de dimension 4 si (u, v, w, x) ou (u, v, w, y) est libre et de dimension 3 sinon.

Déterminons si (u, v, w, x) est libre.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta x = (0, 0, 0, 0)$.

On a alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\beta - 3\gamma + 2\delta = 0 \\ -2\beta - 5\gamma + 2\delta = 0 \\ -\beta - 7\gamma + 6\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = 0 \\ -\beta - 3\gamma + 2\delta = 0 \\ \gamma - 2\delta = 0 \\ -4\gamma + 4\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

La famille (u, v, w, x) est libre, ainsi $\dim(U + V) = 4$.

D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 1$$

Corrigé de l'exercice 8

1. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $f_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $f_k(P) = P(k)$.

Alors $\text{Ker}(f_k)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et $F_i = \bigcap_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \text{Ker } f_k$ est donc également un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in F_i$, alors les $j \in \llbracket 0, n \rrbracket, j \neq i$ sont toutes racines de P , donc P est divisible par $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$.

Soit encore $P = Q \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Mais $\deg(P) \leq n$ et $\deg\left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)\right) = n$, de sorte que, $\deg(Q) = 0$.

Et donc Q est une constante $\lambda \in \mathbb{R} : P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$.

Inversement, puisque les $j \in \llbracket 0, n \rrbracket, j \neq i$ sont racines de $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$, si $P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$, alors $P \in F_i$.

2. Supposons que $P_0 + P_1 + \dots + P_n = 0$, avec $P_0 \in F_0, P_1 \in F_1, \dots, P_n \in F_n$.

Alors, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en évaluant cette relation en $X = i$, il vient

$$P_0(i) + P_1(i) + \dots + P_n(i) = 0 \Rightarrow P_i(i) = 0.$$

Or, P_i est de la forme $P_i = \lambda_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X-j)$, de sorte que $P_i(i) = \lambda_i \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (i-j)}_{\neq 0}$.

Et donc $\lambda_i = 0$, de sorte que $P_i = 0$.

Il est également possible de remarquer que P_i possède déjà n racines (les $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, i \neq j$) car il est dans F_i , et nous venons de montrer qu'il possède également i comme racine. Il est donc de degré au plus n et possède $n+1$ racines, ainsi $P_i = 0$.

Donc $P_0 = P_1 = \dots = P_n = 0$, la somme $F_0 + \dots + F_n$ est directe.

3. Nous avons prouvé à la question 1 que chacun des F_i est de dimension 1. Puisque la somme est directe, il vient

$$\dim\left(\bigoplus_{i=0}^n F_i\right) = \sum_{i=0}^n \dim F_i = n+1.$$

Or, $\bigoplus_{i=0}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n+1$: c'est $\mathbb{R}_n[X]$ tout entier :

$$\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n F_i.$$

Corrigé de l'exercice 9

Soit $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ Q & \mapsto & XQ' + Q \end{matrix}$.

On souhaite montrer que φ est bijective de E dans E . On montre aisément que φ est linéaire.

Vérifions que φ est un endomorphisme de E .

Soit $Q \in E$, on a alors $\deg(Q) \leq n$, d'où

$$\deg(XQ' + Q) \leq \max(\deg(XQ'), \deg(Q)) \leq \max(\deg(Q) + 1, \deg(Q)) \leq \deg(Q)$$

Ainsi $XQ' + Q \in E$, φ est donc bien un endomorphisme de E .

Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie il est bijectif si et seulement si il est injectif.

Soit $Q \in \text{Ker}(\varphi)$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xQ'(x) + Q(x) = 0$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad Q'(x) + \frac{1}{x}Q(x) = 0$$

On résout cette équation différentielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \quad Q(x) = K \exp(-\ln(x)) = \frac{K}{x}$$

Si $K \neq 0$ alors Q n'a pas de limite finie en 0, or Q est continue donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} Q(x) = Q(0)$.

Ainsi $K = 0$. Q est donc égal au polynôme nul sur $]0, +\infty[$. Q admet donc une infinité de racines et, par suite, Q est le polynôme nul.

Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$, φ est injective et donc bijective.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $XQ' + Q = P$.

Corrigé de l'exercice 10

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

— Supposons d'abord que $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Soit $x \in \text{Im}(u)$, il existe alors $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On en déduit que $v(x) = v \circ u(y) = 0_E$.
Ainsi $x \in \text{Ker}(v)$.

On a donc prouvé que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

— Supposons maintenant que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v)$

Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $u(x) \in \text{Ker}(v)$. Ainsi $v \circ u(x) = 0_E$.

On a donc montré que, pour tout $x \in E$, $v \circ u(x) = 0$, c'est-à-dire $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Corrigé de l'exercice 11

1. p est clairement définie de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même, donc il reste à prouver que p est linéaire.

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{C}^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} p(\lambda(x, y) + (x', y')) &= p(\lambda x + x', \lambda y + y') = \frac{1}{5}(\lambda x + x' + 2(\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 4(\lambda y + y')) = \\ &= \lambda \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y) + \frac{1}{5}(x' + 2y', 2x' + 4y') = \lambda p(x, y) + p(x', y'). \end{aligned}$$

Ainsi p est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$.

2. Par définition,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(p) &= \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : p(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \{(-2y, y), y \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(-2, 1) \end{aligned}$$

On en déduit qu'une base de $\text{Ker}(p)$ est donnée par $(-2, 1)$. En particulier, $\text{Ker}(p)$ est de dimension 1, et donc p n'est pas injective.

3. D'après le théorème du rang, $\text{Im}(p)$ est de dimension 1, donc est engendré par n'importe lequel de ses vecteur non nuls.

Par exemple, $p(1, 2) = (1, 2) \in \text{Im}(p)$, donc $(1, 2)$ est une base de $\text{Im}(p)$.

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned}
 p(p(x, y)) &= p\left(\frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y)\right) \\
 &= \frac{1}{5}p(x + 2y, 2x + 4y) \\
 &= \frac{1}{25}(x + 2y + 2(2x + 4y), 2(x + 2y) + 4(2x + 4y)) \\
 &= \frac{1}{25}(5x + 10y, 10x + 20y) \\
 &= \frac{1}{5}(x + 2y, 2x + 4y) \\
 &= p(x, y)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $p \circ p = p$. p est donc un projecteur, de sorte que $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^2$.

Corrigé de l'exercice 12

— Supposons que $p \circ q = p$

Soit $x \in \text{Ker}(q)$, on a alors $p \circ q(x) = 0_E$ d'où $p(x) = 0_E$

Ainsi $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$

Supposons désormais que $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$

Soit $u \in E$, on peut écrire $u = x + y$ avec $x \in \text{Ker}(q)$ et $y \in \text{Im}(q)$, notons $z \in E$ tel que $q(z) = y$.

Alors

$$p \circ q(u) = p \circ q(x) + p \circ q(y) = p \circ q^2(z) = p \circ q(z) = p(y)$$

Et, puisque $x \in \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$,

$$p(u) = p(x) + p(y) = 0_E + p(y)$$

Ainsi, on a bien $p \circ q = p$.

— Supposons que $q \circ p = p$

Soit $y \in \text{Im}(p)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(x)$, d'où $y = q(p(x)) \in \text{Im}(q)$.

Ainsi $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$

Réciproquement, supposons que $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$

Soit $u \in E$, on peut écrire $u = x + y$ avec $x \in \text{Ker}(p)$ et $y \in \text{Im}(p)$

Puisque $y \in \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$, il existe $z \in E$ tel que $y = p(z)$ et $w \in E$ tel que $y = q(w)$.

Alors

$$p(u) = p(y) = p \circ p(z) = p(z) = y$$

Et

$$q \circ p(u) = q(p(y)) = q(y) = q \circ q(w) = q(w) = y$$

Ainsi, on a bien $q \circ p = p$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit h une homothétie de rapport λ et $x \in E$. On a $h^2(x) + 2h(x) - 3x = (\lambda^2 + 2\lambda - 3)x$. Ainsi h vérifie la condition demandée si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad (\lambda^2 + 2\lambda - 3)x = 0_E$$

Ceci doit être vérifié en particulier pour les vecteurs non-nuls, on doit donc avoir $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, i.e. $(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$.

Ainsi, si h vérifie la condition alors $\lambda \in \{1, -3\}$.

Réciproquement, Id et -3Id vérifient la condition demandée. Ce sont donc les deux seules homothéties qui la vérifient.

2. On a $f^2 + 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. D'où

$$f \circ \left(\frac{1}{3}(f + 2\text{Id}_E) \right) = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}(f + 2\text{Id}_E) \circ f = \text{Id}_E$$

Ainsi f est bijective et admet pour bijection réciproque $\frac{1}{3}(f + 2\text{Id}_E)$, on a donc bien $f \in \mathcal{GL}(E)$.

3. On va procéder par analyse synthèse car on n'a aucune indication au niveau des dimensions.

Analyse :

Soit $w \in E$. On suppose qu'il existe $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $v \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ tels que $w = u + v$.

On a $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, donc $f(u) = u$. De manière similaire $v \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$ donc $f(v) = -3v$.

Ainsi, par linéarité de f , $f(w) = u - 3v$

$$\text{On a donc } \begin{cases} w &= u + v \\ f(w) &= u - 3v \end{cases} \cdot \text{D'où } v = \frac{1}{4}(w - f(w)) \text{ et } u = \frac{1}{4}(f(w) + 3w).$$

On en déduit, sous réserve d'existence, l'unicité d'une telle décomposition.

Synthèse :

Soit $w \in E$. On pose $u = \frac{1}{4}(f(w) + 3w)$ et $v = \frac{1}{4}(w - f(w))$.

On a bien $w = u + v$. De plus, par hypothèse $f^2 + 2f - 3\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f^2(w) = -2f(w) + 3w$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{1}{4}(f^2(w) + 3f(w)) = \frac{1}{4}(-2f(w) + 3w + 3f(w)) = \frac{1}{4}(f(w) + 3w) = u \\ f(v) &= \frac{1}{4}(f(w) - f^2(w)) = \frac{1}{4}(f(w) + 2f(w) - 3w) = -3v \end{aligned}$$

On a donc bien $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $v \in \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.

Il y a donc existence et unicité de la décomposition de tout vecteur de E .

Ainsi, $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + 3\text{Id}_E)$.

Corrigé de l'exercice 14

1. Soit $u \notin \text{Ker } \varphi$. En particulier, $u \neq 0$. u est ainsi une famille d'un seul vecteur non nul, donc libre. Comme elle est évidemment génératrice de $\text{Vect}(u)$, c'est une base de $\text{Vect}(u)$, qui est alors de dimension 1.

Puisque φ est une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de E et est donc de dimension $n - 1$.

Ainsi, $\dim \text{Vect}(u) + \dim \text{Ker}(\varphi) = 1 + n - 1 = n = \dim E$.

Montrons maintenant que $\text{Vect}(u) \cap \text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Vect}(u) \cap \text{Ker } \varphi$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$.

Or $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = 0$. Par hypothèse, $u \notin \text{Ker}(\varphi)$, donc $\varphi(u) \neq 0$, ainsi $\lambda = 0$.

On en déduit que $x = 0 \cdot u = 0_E$.

Ainsi $\text{Ker } \varphi \cap \text{Vect}(u) = \{0\}$.

On en déduit que $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E .

2. Soit ψ une autre forme linéaire non nulle sur E .

— Supposons dans un premier temps que ψ et φ sont proportionnelles, il existe donc $a \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = a\varphi$. Comme ψ est non-nulle alors $a \neq 0$.

On a ainsi $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(a\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$.

- Supposons maintenant que $\text{Ker}(\psi) = \text{Ker}(\varphi)$, montrons qu'il existe alors $a \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = a\varphi$.

Soit $u \notin \text{Ker}(\varphi)$, d'après la question précédente on a

$$E = \text{Ker}(\varphi) \oplus \text{Vect}(u)$$

Soit $x \in E$, on peut écrire x sous la forme $x = x_K + \lambda_x u$ où $x_K \in \text{Ker}(\varphi)$ et $\lambda_x \in \mathbb{K}$.

Alors

$$\varphi(x) = \varphi(x_K + \lambda_x u) = \varphi(x_K) + \lambda_x \varphi(u) = \lambda_x \varphi(u)$$

et

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_K + \lambda_x u) \\ &= \psi(x_K) + \lambda_x \psi(u) \\ &= \lambda_x \psi(u) \\ &= \lambda_x \psi(u) \frac{\varphi(u)}{\varphi(u)} \\ &= \lambda_x \varphi(u) \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \\ &= \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \varphi(x) \end{aligned}$$

Posons $a = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} \neq 0$ car ψ est non-nulle. On a alors

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = a\varphi(x)$$

C'est-à-dire $\psi = a\varphi$.

Corrigé de l'exercice 15

On va montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$$

En composant par f^{n-1} on a alors

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-2}(x) = 0$$

Or, comme $f^n(x) = 0$, on a alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{n+k}(x) = f^k(f^n(x)) = f^k(0_E) = 0_E$. Ainsi

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-2}(x) = \lambda_0 f^{n-1}(x)$$

On a alors $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$, d'où, comme $f^{n-1}(x) \neq 0_E$, $\lambda_0 = 0$.

Ainsi

$$\lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$$

En composant par f^{n-2} on obtient de manière similaire $\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0_E$, d'où $\lambda_1 = 0$.

On répète ce procédé et finalement on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. La famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est alors une famille libre de cardinal n dans E qui est un espace vectoriel de dimension n , c'est ainsi une base de E .

Corrigé de l'exercice 16

1. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$a(P + \lambda Q) = X(P + \lambda Q) = XP + \lambda XQ = a(P) + \lambda a(Q)$$

Ainsi a est une application linéaire. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $XP \in \mathbb{R}[X]$, a est bien un endomorphisme de E

Pour tout P non nul, on a

$$\deg(a(P)) = \deg(P) + 1 \geq 1$$

En particulier $1 \notin \text{Im}(a)$, a n'est donc pas surjectif.

Par ailleurs, $P \in \text{Ker}(a)$ si et seulement si $XP = 0$ donc si et seulement $P = 0$. a est ainsi injectif.

2. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(u + \lambda v) &= (u + \lambda v) \circ a - a \circ (u + \lambda v) \\ &= u \circ a + \lambda v \circ a - (a \circ u + \lambda a \circ v) \quad \text{car } a \text{ est linéaire} \\ &= \varphi(u) + \lambda \varphi(v) \end{aligned}$$

Ainsi φ est une application linéaire.

De plus, $\varphi(\text{Id}_E) = 0$, φ n'est donc pas injectif.

3. — On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(u)(X^n) = u(X^{n+1}) - Xu(X^n)$.
— Soit $v \in L(E)$. On cherche $u \in L(E)$ tel que $v = \varphi(u)$.

Un endomorphisme est caractérisé de manière unique par l'image d'une base, la question précédente nous donne alors l'idée de poser l'unique endomorphisme u tel que $u(1) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(X^{n+1}) = v(X^n) + Xu(X^n)$.

Alors $\varphi(u)$ et v coïncident sur la base canonique de E , on a donc $v = \varphi(u)$, ce qui montre que φ est surjectif.

Corrigé de l'exercice 17

1. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$D(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = D(P) + \lambda D(Q)$$

Ainsi D est une application linéaire.

Puisque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n alors $P(D) = D'$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et donc $D(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement D est bien un endomorphisme de E .

On a $\text{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$ l'ensemble des polynômes constants.

On a déjà remarqué que $\text{Im}(D) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus le théorème du rang nous assure que $\dim(\text{Im}(D)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(D)) = n + 1 - 1 = n$. Ainsi $\dim(\text{Im}(D)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ et donc $\text{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. Soit $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$, d'où $P^{(n+1)} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, i.e. $D^{n+1}(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Ainsi, pour tout polynôme $P \in E$, $D^{n+1}(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. En d'autres termes $D^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

3. Les endomorphismes Id_E et D commutent, ainsi d'après l'identité de factorisation

$$\text{Id}_E^{n+1} - D^{n+1} = (\text{Id}_E - D) \circ \sum_{k=0}^n \text{Id}_E^{n-k} \circ D^k$$

D'où

$$\text{Id}_E = (\text{Id}_E - D) \circ \sum_{k=0}^n D^k$$

De même

$$\text{Id}_E = \left(\sum_{k=0}^n D^k \right) \circ (\text{Id}_E - D)$$

L'endomorphisme $\text{Id}_E - D$ est ainsi bijectif de bijection réciproque $\sum_{k=0}^n D^k$.

Classique

Cet argument classique exploite uniquement le caractère nilpotent de D et sera donc ré-exploitable dans d'autres situations, par exemple pour identifier une matrice N une matrice nilpotente.

4. Sur E l'équation différentielle $P'(x) - P(x) = \frac{x^n}{n!}$ se réécrit $(D - \text{Id}_E)(P) = \frac{X^n}{n!}$.

Cette équation est donc équivalente sur E à $P = - \left(\sum_{k=0}^n D^k \right) \left(\frac{X^n}{n!} \right)$.

Or

$$- \left(\sum_{k=0}^n D^k \right) \left(\frac{X^n}{n!} \right) = - \sum_{k=0}^n \frac{X^{n-k}}{(n-k)!} = - \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$$

On a ainsi obtenu une solution particulière de notre équation différentielle, la fonction $x \mapsto - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}$.

Il ne nous reste plus qu'à résoudre l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ dont les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto K e^x$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Le théorème de structure de l'ensemble des solutions nous assure alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$ est

$$\left\{ x \mapsto K e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}, K \in \mathbb{R} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 18

1. (a) Clairement, si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Réciproquement supposons que $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On a alors $p \circ q = -q \circ p$.

De plus

$$\begin{aligned} p \circ q &= (p \circ p) \circ q \\ &= p \circ (p \circ q) \\ &= p \circ (-q \circ p) \\ &= -p \circ q \circ p \\ &= -(p \circ q) \circ p \\ &= q \circ p \circ p \\ &= q \circ p \\ &= -p \circ q \end{aligned}$$

Ainsi $2p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et, par suite, $q \circ p = -p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- (b) $p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p + q) \circ (p + q) = p + q$.

Or

$$(p + q) \circ (p + q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q + p \circ q + q \circ p$$

Ainsi $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui, d'après la question précédente, est équivalent à $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Finalement $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- (c) On suppose désormais que $p + q$ est un projecteur.

Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$, on a donc $p(x) = q(x) = 0_E$ d'où $(p + q)(x) = 0_E$.

Ainsi $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p + q)$.

Soit maintenant $x \in \text{Ker}(p + q)$, on a alors

$$0_E = p(x) + q(x) = p(p(x) + q(x)) = p(x) + p \circ q(x)$$

Or $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $p(x) = 0_E$, i.e. $x \in \text{Ker}(p)$. On montre de manière similaire que $x \in \text{Ker}(q)$

Ainsi $\text{Ker}(p + q) \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ et donc $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

- (d) Soit $y \in \text{Im}(p + q)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = (p + q)(x) = p(x) + q(x)$.

Ainsi $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. On a donc $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$

Soit maintenant $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, il existe alors $(a, b) \in E^2$ tel que $y = p(a) + q(b)$.

Or

$$(p + q)(p(a) + q(b)) = p^2(a) + q \circ p(a) + q(b) + q \circ p(b) = p(a) + q(b) = y$$

Ainsi $y = (p + q)(p(a) + q(b)) \in \text{Im}(p + q)$.

On a donc $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p + q)$. D'où $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) = \text{Im}(p + q)$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x, 2x)$

- (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f \circ f((x, y)) = f((x, 2x)) = (x, 2x) = f((x, y))$$

Ainsi $f \circ f = f$, f est bien un projecteur.

- (b) Procédons par analyse-synthèse :

Analyse :

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, on suppose que $f + g$ est un projecteur. D'après ce que l'on vient de prouver, $f + g$ est un projecteur si et seulement si $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

On doit donc avoir $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1))$ et $\text{Vect}((1, 2)) = \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Puisque $\text{Im}(g) \subset \text{Vect}((0, 1))$ alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g((x, y)) = (0, ax + by)$$

On sait de plus que $g((1, 2)) = (0, 0)$, ainsi $a + 2b = 0$ i.e. $a = -2b$.

Donc, si $f + g$ est un projecteur alors il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que $g : (x, y) \mapsto (0, b(y - 2x))$.

Synthèse :

Soit $b \in \mathbb{R}$ et $g : (x, y) \mapsto (0, b(y - 2x))$.

Alors, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(g((x, y))) = f((0, b(y - 2x))) = (0, 0) \quad \text{et} \quad g(f((x, y))) = g((x, 2x)) = (0, b(2x - 2x)) = (0, 0)$$

Ainsi $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$, $f + g$ est donc bien un projecteur.

Finalement $f + g$ est un projecteur si et seulement si $g \in \text{Vect}((x, y) \mapsto (0, y - 2x))$.

On soupçonne que l'on va montrer que $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) = \text{Im}(p + q)$ et donc, on devrait avoir $y \in \text{Im}(p + q)$. Or, puisque $p + q$ est un projecteur, il se comporte comme l'identité sur son image. Il est donc raisonnable de penser que $(p + q)(y) = y$, il n'y a plus qu'à vérifier que c'est bien le cas.

Corrigé de l'exercice 19

1. On a

$$(f^2 + f + \text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = f^3 + f^2 + f + -f^2 - f - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Ainsi $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.

2. Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Il existe alors $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$. De plus $f(x) = x$, d'où $f^2(x) = f(x) = x$

On a alors $f^3(y) - f^2(y) = f^2(y) - f(y) = f(y) - y = x$. Ainsi

$$3x = f^3(y) - f^2(y) + f^2(y) - f(y) + f(y) = y - f^2(y) + f^2(y) - f(y) + f(y) - y = 0_E$$

On en déduit que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

Le théorème du rang appliqué à $f - \text{Id}_E$ nous assure que

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E))$$

D'où $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

voir l'exercice 10

3. Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$, on a donc $f(x) = x$ et $f^2(x) + f(x) + x = 0_E$.

D'où $0_E = f^2(x) + f(x) + x = 3x$. On en déduit que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.

$\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$ sont donc en somme directe, d'où $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)) = \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E))$ et donc, puisque $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \subset E$,

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)) \leq \dim(E)$$

Or

$$\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)) \geq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Im}(f - \text{Id}_E)) = \dim(E)$$

Finalement $\dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)) = \dim(E)$ et donc

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E).$$

Corrigé de l'exercice 20

$$\begin{aligned} \text{— Soit } \varphi : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{aligned}$$

φ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) et $F = \text{Ker}(\varphi)$, ainsi F est un sous-espace vectoriel de E .

F est le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un hyperplan de E , d'où $\dim(F) = \dim(E) - 1 = 2$.

- G est une droite vectorielle donc $\dim(G) = 1$. On a donc $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(E)$.

Soit $P \in F \cap G$, il existe donc $K \in \mathbb{R}$ tel que $P = K(1 + X + X^2)$, de plus $\int_0^1 P(t) dt = 0$.

Or

$$\int_0^1 P(t) dt = K \int_0^1 1 + t + t^2 dt = K \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11K}{6}$$

Ainsi $K = 0$ et donc $P = 0_E$.

On a alors $F \cap G = \{0_E\}$ et donc $E = F \oplus G$.

- Puisque $E = F \oplus G$ alors, pour tout $Q \in E$ il existe $P \in F$ et $K \in \mathbb{R}$ tels que $Q = P + K(1 + X + X^2)$.

La projection de Q sur F parallèlement à G est le polynôme P .

Or $P \in F$, donc $\int_0^1 P(t) dt = 0$, ainsi

$$\int_0^1 Q(t) dt = K \int_0^1 1 + t + t^2 dt = \frac{11K}{6}$$

D'où $K = \frac{6}{11} \int_0^1 Q(t) dt$ et donc

$$p(Q) = Q - \frac{6}{11} \frac{6}{11} \int_0^1 Q(t) dt$$

Corrigé de l'exercice 21

Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) = P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$$

Ainsi φ est une application linéaire.

Puisque P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n alors, par composition, $P(X+1)$ est un polynôme de degré $\deg(P) \times 1$ donc de degré inférieur ou égal à n ainsi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Finalement φ est bien un endomorphisme de E .

On a vu dans le TD précédent que les polynômes qui vérifient $P(X+1) = P(X)$ sont exactement les polynômes constants, ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$.

Soit $P = a_n X^n + Q$ où $\deg(Q) \leq n-1$ alors

$$\varphi(P) = a_n(X+1)^n - a_n X^n + \varphi(Q) = a_n X^n + a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k - a_n X^n + \varphi(Q) = a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k + \varphi(Q)$$

Puisque $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $\varphi(Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a également $a_n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On a donc $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus le théorème du rang nous assure que $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = n+1-1 = n$. Ainsi $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ et donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Dérivée discrète

La quantité $\varphi(P)$ est appelée dérivée discrète de P et vérifie de nombreuses propriétés de la dérivée « usuelle » des polynômes.